5

GRAM-SCHMIDT

1.- Construya una base ortonormal para el espacio o subespacio vectorial dado.

a.- $H = \{(x, y) \in R^2 : x + y = 0\}$

b.- $H = \{(x, y) \in R^2 : ax + by = 0\}$ sol 4.9 ej 3

c.- $\pi = \{(x, y, z) : 3x - 2y + 6z = 0\}$

d.- $H = \{(x, y, z, w, v) \in R^5 : 2x - 3y + z + 4w - v = 0\}$

2.- En cada uno de los incisos siguientes aplicar el proceso de Gram- Schmidt al subconjunto dado S del espacio con producto interno V.

a.- $V = R^3, S = \{(1,1,1)(0,1,1)(1,3,3)\}$

b.- $V = P_2\ con\ (f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx\ ,\ S = \{(1, x, x^2)\}$

c.- $V = C^3, S = \{(1, i, 0)(1 - i, 2, 4i)\}$

d.- $V = CV(a, b) con \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx\ \ S = \{(x + i)(1 + x^2 i)\}\ en\ (0,3)$

3.- Encuentre una base ortonormal para $W = \{(x, y, z, t) \in R^4 ; x + y + z + t = 0\}$

4.- Determine una base ortonormal para cada uno de los tres subespacios vectoriales W con producto interno señalado.

a.- $V = R^4\ \ con\ producto\ interno\ usual\ y\ W = \{(1,1,0,0)(0,1,2,0)(0,0,3,4)\}$

b.- $V = P_3\ con\ producto\ interno\ \langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)\overset{g}{.}(x)dx\ \ W = (1, 1 + x, x^3)$

c.- $V = M_{22}\ con\ producto\ interno\ \langle A, B\rangle = tr(A^t B)$

$$W = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

PROYECCION ORTOGONAL Y COMPLEMENTO ORTOGONAL.

1.- Encuentre la proyección ortogonal de π sobre V donde

$$\pi = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : 2x - y + 3z = 0\right\} y\ v = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Determine la proyección sobre el complemento ortogonal de π.

2.- En los siguientes ejercicios se da los subespacios vectorial H, determine una base para cada subespacio, calcule la proyección del vector v sobre el subespacio, encuentre una base ortonormal para el complemento ortogonal, escriba el vector v como $h + p$.

a.- $H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in R^2 : x - 2y = 0 \right\} \quad v = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

b.- $H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3 : 3x - 2y + 6z = 0 \right\} \quad v = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

c.- $H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in R^4 : x = y \ y \ w = 3y \right\} \quad v = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

d.- $H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3 : \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} \right\} \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3.- Sean $V = C^3$ y $S = \{(1,0,i)(1,2,1)\}$ calcular $S^{\perp}$

4.- Sea $V = C^3$ con el producto interno ordinario y sea $W = \{(i,0,1)\}$. Encontrar bases ortonormales para W y $W^{\perp}$

5.- Diga si los vectores son ortogonales entre con el producto interno dado:

a.- $V = R^3$ con producto interno usual, $S = \{(0,1,1)(1,1,0)\}$

b.- $V = P_2$ con producto interno $\langle p,q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$, $S = \{t, t^2\}$

c.- $V = M_{22}$ con producto interno $\langle A,B \rangle = tr(A^t B)$

Si

$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

6.- Encuentre un base ortonormal para $P_2[0,2]$

TRANSFORMACIONES LINEALES.

1.- Verifique que la transformación $T: R^2 \to R^3$ tal que

$T(x,y) = (x + y, y, x - y)$ es una transformación lineal.

2.- Verifique si la transformación $T: R^2 \to R^3$ tal que

$T(x,y) = (x + y, x + y + 2, y)$ es una transformación lineal.

3.- Compruebe que la transformación $T: M_n(R) \to M_n(R)$ tal que $T(A) = MA + AM$ donde M es una matriz fija en $M_n(R)$, es una transformación lineal.

4.- Determine la transformación lineal $T: R^2 \to R^2$ tal que $T(1,1) = (0,2)$ y $T(3,1) = (2,-4)$

5.- Sea $T: R^3 \to R^2$ una transformación lineal tal que

$T(x, y, z) = (2x + y, x + y + z)$. Determine la matriz asociada a la transformación.

6.- Sea $T: P_2 \to M_2$ una transformación lineal tal que

$$T(a + bx + cx^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & a + b + c \end{pmatrix}$$

Determine el núcleo de la transformación lineal.

7.- Considere la transformación lineal $T: R^3 \to R^2$ tal que

$$T(x, y, z) = (x + y, x - y + z)$$

Determine la imagen de la transformación

8.- Determine una transformación lineal $T: R^3 \to R^3$ tal que el núcleo de la transformación es el vector (1,2,0) y la imagen es $Im(T) = \langle (0,1,2)(0,0,3) \rangle$. Determine además $T(-1,2,3)$

9.- Sea $T: R^3 \to R^3$ una transformación lineal tal que $T(1,2,0) = (3,1,0)$, $T(0,1,2) = (1,1,1)$. Determine:

a.- $T(x, y, z)$

b.- $T(1,2,3)$

10.- Determine cuál de las siguientes transformaciones son transformaciones lineales.

a.- $T: R^3 \to R^2$ *tal que* $T(x, y, z) = (x, y)$

b.- $T: R^3 \to R^3$ *tal que* $T(x, y, z) = (x, y, z) + (1,2,3)$

c.- $T: R^3 \to R^3$ *tal que* $T(x, y, z) = (2x, y, x - z)$

d.- $T: R^2 \to R^2$ *tal que* $T(x, y) = (x^2, y^2)$

e.- $T: R^2 \to R$ *tal que* $T(x, y) = |x - y|$

f.- $T: M_2 \to R\ \ tal\ que\ \ T(A) = \det(A)$

g.- $T: M_n \to M_n\ \ tal\ que:$

i.- $T(A) = AB - BA\ \ \ con\ B \in M_n\ matriz\ fija$

ii.- $T(A) = A^t$

11.- Sea V el espacio formado por todas las funciones continuas de R en R. definimos la transformación

$$T\big(f(x)\big) = \int_0^x f(t)dt$$

Demuestre que T es una transformación lineal.

12 Sea$T: R^2 \to R^2$ una transformación lineal tal que $T(x,y) = (x+y, 2x-y)$

Determine la nulidad de la transformación lineal.

13.- Sea $T: R^3 \to R^3$ una transformación tal que

$$T(1,-1,1) = (-1,0,3)\quad , \quad T(0,2,0) = (4,2,2)\quad , \quad T(1,0,0) = (1,1,2)$$

a.- Demuestre que $A = \{(1,-1,1), (0,2,0), (1,0,0)\}$ es base de R^3

b.- Determine la transformación lineal $T(x,y,z)$

c.- Determine la nulidad de la transformación lineal.

14.- Determine una transformación lineal $T: M_{3,1} \to R^3$ tal que

$nuT = \langle\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\rangle$ y además $Im(T) = \langle\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}\rangle$.

15.- Sea $T: R^3 \to R^3$ una transformación lineal tal que $T(x,y,z) = (x-y+2z, 2x+y, -x-2y+2z)$ ¿Qué condiciones deben cumplir a,b,c $\in$ R para que $(a,b,c) \in nuT$?

16.- Sea $T: M_n \to M_n$ una transformación lineal tal que $T(A) = BAB^t$ con $B \in M_n$ una matriz fija

a.- Demuestre que T es una transformación lineal.

b.- Si n=2 y $B = \begin{pmatrix}0 & -2\\0 & 1\end{pmatrix}$

i.- Determine la nulidad de la transformación

17.- Hallar una transformación lineal $T: R^4 \rightarrow R^4$ tal que

$$\langle v_1 = (1,-1,2,1), v_2 = (0,-1,2,1)\rangle = nuT$$

$$\langle w_1 = (1,2,-1), w_2 = (2,1,-2)\rangle = ImT$$

18.- Sea $T: P_2(x) \rightarrow R$ una transformación lineal tal que

$$T(ax^2 + bx + c) = \int_0^1 (ax^2 + bx + c)dx$$

a.- Determine la nulidad

b.- Determine el rango

19.-Sea $T: R^3 \rightarrow R^2$ una transformación definida por $T(x,y,z) = (x + y, 2z)$

a.- Si B es la base canoníca de R^3 y B_1 es la base canoníca de R^2 determine la matriz asociada a la transformación lineal T

b.- Si $B = \langle v_1 = (1,0,-1), v_2 = (1,0,0), v_3 = (1,1,1)\rangle$ y $B_1 = \langle w_1 = (0,-1); w_2 = (1,2)\rangle$ ¿Cuál es la nueva matriz asociada a la transformación lineal?

20.- Defina una transformación lineal $T: P_2 \rightarrow M_2$ tal que

$$nuT = \langle (1 + x^2)\rangle \quad y\ ImT = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2 \,/\, a = b, d = c\right\}$$

21.- Se define la transformación $T: M_n \rightarrow R$ por

$$T(A) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$$

Demuestre que T es una transformación lineal.

22.- Defínase la transformación lineal $T: P_2 \rightarrow M_2$ mediante

$$T(f(x)) = \begin{pmatrix} f(1) - f(2) & 0 \\ 0 & f(0) \end{pmatrix}$$

Determine el rango de la transformación lineal.